

Практика №3 (5.10.2021, 12.10.2021)

---

**Взаимная информация и условная взаимная информация.**

1. Одновременно и независимо выполняется подбрасывание игрального кубика и монеты. Пусть  $A$  - случайная величина, принимающее значение, выпавшее на кубике, а  $B$  - случайная величина, принимающее в качестве значения результат подбрасывания монеты (1 - орел, 0 - решка). Случайные величины  $X$  и  $Y$  задаются формулами  $X = A + B$ ,  $Y = A - B$ .

- Вычислить  $H(X)$ ,  $H(Y)$ , условные энтропии  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$ , совместную энтропию  $H(X, Y)$  и взаимную информацию  $\mathbb{I}(X, Y)$ .
- Доказать, что для независимых дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$ ,

$$\mathbb{I}(X, X + Y) - \mathbb{I}(Y, X + Y) = H(X) - H(Y)$$

2. Тай-брейк в некоторой спортивной игре между двумя командами ( $A$  и  $B$ ) представляет собой серию из не более, чем 7 игр, продолжающуюся до 4-х побед одной из команд. Пусть  $X$  - случайная величина, значением которой является результат сыгранного тай-брейка. Например, ее значением может быть последовательность символов  $AAAA$  (выиграла команда  $A$  за 4 игры), или  $BABABAB$  (выиграла команда  $B$ ), и т.д. Пусть  $Y$  - случайная величина, значение которой - количество сыгранных игр за тай-брейк, т.е.  $4 \leq Y \leq 7$ . Будем считать, что команды  $A$  и  $B$  - одинаковые (не имеют преимуществ друг перед другом), а игры, сыгранные на тай-брейке независимые. Определить  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(Y|X)$ ,  $H(X|Y)$ .

3. Пусть  $p = (p_1, \dots, p_m)$  - распределение вероятностей случайной величины, принимающей  $m$  различных значений, т.е.  $p_i \geq 0$  и  $\sum p_i = 1$ . Рассмотрим распределение  $q$  другой случайной величины, принимающей  $m - 1$  значений:

$$q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_{m-2} = p_{m-2}, q_{m-1} = p_{m-1} + p_m$$

Т.е. распределение  $q$  получено из  $p$  объединением двух последних значений случайной величины и сложением их вероятностей. Докажите, что энтропия при этом уменьшилась, причем

$$H(p) = H(q) + (p_{m-1} + p_m) \cdot H\left(\frac{p_{m-1}}{p_{m-1} + p_m}, \frac{p_m}{p_{m-1} + p_m}\right)$$

4. Доказать, что при усреднении двух (и более) значений в векторе распределения вероятностей, энтропия увеличивается (т.е. в случае, когда распределение становится "более равномерным"):

$$p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_m)$$
$$q = (p_1, \dots, \frac{p_i + p_j}{2}, \dots, \frac{p_i + p_j}{2}, \dots, p_m)$$

Доказать, что  $H(q) \geq H(p)$ .

5. Доказать правило цепочки для условной энтропии:

$$H(X_1, \dots, X_n | Y) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}, Y)$$