

**Практика №2 (15.09.2022)**

**1. Неопределенность информации и энтропия.**

1. [Che13 1.4] В урне  $r$  красных шаров,  $b$  черных и  $w$  белых. Случайный эксперимент  $X$  состоит в том, что выбирают  $k \geq 2$  шаров и фиксируют их цвета. В каком случае величина  $H(X)$  больше - при выборе с возвращением или без возвращения?

2. [Che13 1.23] Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют распределения:

$$X \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad Y \sim \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 2 \\ \hline \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$$

при этом  $Z = X + Y$ . Вычислить энтропию  $H(Z|Y)$ .

3. [Che13 1.23] Пусть  $X$  и  $Y$  - зависимые случайные величины,  $H(X) = 8$  бит,  $H(Y) = 12$  бит. Какие значения может принимать  $H(Y|X)$ , если  $H(X|Y)$  изменяется в максимально возможных пределах?

4. Пусть  $X$  - случайная величина, имеющее распределение Бернулли, т.е.  $P(X = 1) = p$ ,  $P(X = 0) = 1 - p$ . Энтропия такой случайной величины выражается формулой

$$H(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$$

- Вычислить  $H(1/4)$  по определению энтропии (не используя вычислительную формулу), если известно значение  $\log_2 3 \approx 1.584$ .
- Вычислить ожидаемое значение энтропии  $H(p)$ , если  $p$  равномерно распределено на отрезке  $p \in [0, 1]$ .

5. Пусть  $X$  и  $Y$  - случайные величины, принимающие значения из множеств  $\{x_1, \dots, x_r\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_s\}$  соответственно. Пусть  $Z = X + Y$ .

- Показать, что  $H(Z|X) = H(Y|X)$ . Доказать, что если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $H(Y) \leq H(Z)$  и  $H(X) \leq H(Z)$ . Следовательно, сложение независимых случайных величин увеличивает неопределенность.

- Привести пример (зависимых случайных величин), при котором  $H(X) > H(Z)$  и  $H(Y) > H(Z)$ .
- В каком случае  $H(Z) = H(X) + H(Y)$ ?

### Домашнее задание

1. Известно, что женщин старше 80 лет в три раза больше, чем мужчин в той же возрастной группе. Сколько информации (в битах) несет сообщение о том, что человек старше 80 лет - мужчина?

2. Пусть имеется  $n$  дискретных случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , энтропия случайной величины  $X_i$  равна  $H(X_i)$ , при этом  $\max\{H(X_i)\} = H(X_L)$ . Каковы верхние и нижние оценки совместной энтропии  $H(X_1, \dots, X_n)$ ? При каких условиях эти границы достигаются?