
Практика №3 (20.10.2023)

Взаимная информация и условная взаимная информация.

1. Одновременно и независимо выполняется подбрасывание игрального кубика и монеты. Пусть A - случайная величина, принимающее значение, выпавшее на кубике, а B - случайная величина, принимающее в качестве значения результат подбрасывания монеты (1 - орел, 0 - решка). Случайные величины X и Y задаются формулами $X = A + B$, $Y = A - B$.

- Вычислить $H(X)$, $H(Y)$, условные энтропии $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, совместную энтропию $H(X, Y)$ и взаимную информацию $\mathbb{I}(X, Y)$.
- Доказать, что для независимых дискретных случайных величин X и Y,

$$\mathbb{I}(X, X + Y) - \mathbb{I}(Y, X + Y) = H(X) - H(Y)$$

2. Тай-брейк в некоторой спортивной игре между двумя командами (A и B) представляет собой серию из не более, чем 7 игр, продолжающуюся до 4-х побед одной из команд. Пусть X - случайная величина, значением которой является результат сыгранного тай-брейка. Например, ее значением может быть последовательность символов $AAAA$ (выиграла команда A за 4 игры), или $BABABAB$ (выиграла команда B), и т.д. Пусть Y - случайная величина, значение которой - количество сыгранных игр за тай-брейк, т.е. $4 \leq Y \leq 7$. Будем считать, что команды A и B - одинаковые (не имеют преимуществ друг перед другом), а игры, сыгранные на тай-брейке независимые. Определить $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$.

3. Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)$ - распределение вероятностей случайной величины, принимающей m различных значений, т.е. $p_i \geq 0$ и $\sum p_i = 1$. Рассмотрим распределение q другой случайной величины, принимающей $m - 1$ значений:

$$q_1 = p_1, q_2 = p_2, \ldots, q_{m-2} = p_{m-2}, q_{m-1} = p_{m-1} + p_m$$

Т.е. распределение q получено из p объединением двух последних значений случайной величины и сложением их вероятностей. Докажите, что энтропия при этом уменьшилась, причем

$$H(p) = H(q) + (p_{m-1} + p_m) \cdot H(\frac{p_{m-1}}{p_{m-1} + p_m}, \frac{p_m}{p_{m-1} + p_m})$$

4. Доказать, что при усреднении двух (и более) значений в векторе распределения вероятностей, энтропия увеличивается (т.е. в случае, когда распределение становится "более равномерным"):

$$p = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_m)$$

$$q = (p_1, \ldots, \frac{p_i + p_j}{2}, \ldots, \frac{p_i + p_j}{2}, \ldots, p_m)$$

Доказать, что $H(q) \geq H(p)$.

5. Доказать правило цепочки для условной энтропии:

$$H(X_1, \ldots, X_n | Y) = \sum_{i=1}^{m} H(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}, Y)$$