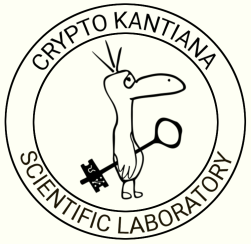
Эллиптические кривые

Лекция 6. Алгоритмы подсчета $\mathbb{F}_q$-рациональных точек кривой. Часть II

Семён Новосёлов

БФУ им. И. Канта

2022



IKBFU

ρ-метод Полларда

$$E/\mathbb{F}_q : y^2 = x^3 + ax + b$$

$$P \in E(\mathbb{F}_q), \operatorname{ord} P = ?$$

Идея: задать псевдослучайную последовательность точек $P_0 = P, P_{i+1} = f(P_i)$ и экспонент $e_0, e_1, \ldots$, т. ч. $P_i = [e_i]P$.
$E(\mathbb{F}_q)$ – конечная группа $\Longrightarrow$ $\exists i, j : P_i = P_j$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{ord}(P)$ делит $|e_i - e_j|$.

Для нахождения i, j т.ч. $P_i = P_j$ используются различные алгоритмы нахождения циклов.

ρ-метод Полларда

На основе алг. поиска циклов Флойда

Вход: $P \in E(\mathbb{F}_q)$, $r \in \mathbb{N}$, $h : E(\mathbb{F}_q) \to \{1, \ldots, r\}$.
Выход: M т.ч., $\mathrm{ord}(P) \mid M$

1. Сгенерировать r случайных чисел α_i;
2. Вычислить $Q_i = [\alpha_i]P$;
3. Задать $f : (P, e) \mapsto (P + Q_{h(P)}, e + \alpha_{h(P)})$;
4. $(P_1, e_1) = (P, 1)$;
5. $(P_2, e_2) = f(P_1, e_1)$;
6. **while** $P_1 \neq P_2$ **do:**
7. $\quad (P_1, e_1) = f(P_1, e_1)$;
8. $\quad (P_2, e_2) = f(f(P_2, e_2))$;
9. **return** $M = |e_1 - e_2|$.

Сложность: $O(q^{1/4})$ по времени и $O(1)$ по памяти.

Алгоритм Схоофа[1]

$$E/\mathbb{F}_q : y^2 = x^3 + ax + b$$

Имеем:

- $|E(\mathbb{F}_q)| = q + 1 - t$, где t – след эндоморфизма Фробениуса, $|t| \leq 2\sqrt{q}$.

Идея: найти $t \pmod{\ell_i}$ для малых простых чисел $\ell_1, \ldots, \ell_n$ и восстановить t по КТО и неравенству для следа t.

- $|t| \leq 2\sqrt{q} \implies \prod_{i=1}^{n} \ell_i > 4\sqrt{q} \implies \ell_n = O(\log q)$

[1] (гол.) Schoof = Схооф, в рус. лит. больше известен как Шуф.

Число точек по модулю $\ell = 2$

- $\#E(\mathbb{F}_q)$ – чётно $\iff$ $E(\mathbb{F}_q)$ содержит точку ($\neq \mathcal{O}$) порядка 2
- точка P порядка 2 имеет $y_P = 0$ $\iff$ $x_P^3 + ax_P + b = 0$ в $\mathbb{F}_q$
- Проверка наличия точек порядка 2:
  $\gcd(x^q - x, x^3 + ax + b) \neq 1$ в $\mathbb{F}_q[x]$

  $\Longrightarrow$ $O(\log^3 q)$, быстрое возведение в степень в $\mathbb{F}_q[x]/(x^3 + ax + b)$

Число точек по модулю $\ell > 2$

$$E[\ell] = \{P \in E(\overline{\mathbb{F}}_q) \mid [\ell]P = \mathcal{O}\} \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

- $\varphi_q : (x, y) \mapsto (x^q, y^q)$ – эндоморфизм Фробениуса,

$$\varphi_q^2 - [t]\varphi_q + [q] = 0$$

или

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - [t](x^q, y^q) + [q](x, y) = P_\infty.$$

- для ограничения φ_q на $E[\ell]$ имеем:

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - [t'](x^q, y^q) + [q'](x, y) = P_\infty,$$

где $t', q' \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ и $t = t' \pmod{\ell}$, $q = q' \pmod{\ell}$.

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - [t'](x^q, y^q) + [q'](x, y) = P_\infty \qquad (1)$$

- $\psi_\ell(x) \in \mathbb{F}_q[x]$, ℓ-многочлен деления (может быть эффективно вычислен по рек. формуле)
- $P = (x_P, y_P) \in E[\ell] \iff \psi_\ell(x_P) = 0$
- из (1) получаем

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) + [q'](x, y) = [t'](x^q, y^q)$$

по модулю $\psi_\ell(x)$ и $E(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) + [q'](x, y) = [t'](x^q, y^q) \mod (\psi_\ell(x), E(x, y)) \quad (2)$$

- $x^q, y^q, x^{q^2}, y^{q^2} \pmod{\psi_\ell} \Longrightarrow$ быстрое возведение в степень
- $[q'](x, y)$ и $[t'](x^q, y^q) \pmod{\psi_\ell(x)} \Longrightarrow$ многочлены q' и t'-деления

Значение $t' = t \bmod \ell$ и соответственно $\#E(\mathbb{F}_q) \bmod \ell$ находим перебором возможных вариантов для t' пока не выполнится (2).

Алгоритм Схоофа

Вход: $E/\mathbb{F}_q$
Выход: $\#E(\mathbb{F}_q)$

1. $M = 2, \ell = 3, S = \{(t \bmod 2, 2)\}$
2. **while** $M < 4\sqrt{q}$ **do:**
3. **for** $t' = 0, \ldots, \ell - 1$ **do:**
4. **if** $\varphi_q^2(P) + [q']P = [t']\varphi_q(P) \pmod{(\psi_\ell, E)}$ **do:** **break**
5. $S = S \cup \{(t', \ell)\}$
6. $M = M \cdot \ell$
7. $\ell = \mathrm{next\_prime}(\ell)$
8. найти t по КТО, используя S
9. **return** $q + 1 - t$

Анализ сложности

Оценка размера ℓ.

$$\ell = O(\log q)$$

◁

1. для однозначного восстановления t по $M = \prod_{i=1}^{n} \ell_i$, необх. $M > 4\sqrt{q}$.
2. $M = p_n\#$ – прайморциал $\Longrightarrow$ $M = n^{(1+o(1))n}$.

Объединяя пункты 1 и 2 получаем: $n \log n = O(\log q)$ $\Longrightarrow$ $n = O(\frac{\log q}{\log\log q})$.
$\ell = \ell_n = O(n \log n)$ (теорема о распределении простых чисел) $\Longrightarrow$ $\ell = O(\log q)$.

▷

Оценка сложности операций.

Базовые операции:[2]

- Редукция многочлена степени d по модулю ψ_ℓ и E:
  $\widetilde{O}(d^2 + \deg \psi_\ell{}^2)$ операций в $\mathbb{F}_q$.
  $\deg \psi = \frac{\ell^2-1}{2} \implies \widetilde{O}(d^2 + \ell^4)$.
- Умножение в кольце $\mathbb{F}_q[x,y]/(\psi_\ell, E)$:
  $\widetilde{O}(\ell^4)$ операций в $\mathbb{F}_q$.

[2] Hoeven J.v.d., Larrieu R. - Fast reduction of bivariate polynomials with respect to sufficiently regular Gröbner bases. 2018.

Проверка условия $\varphi_q^2(P) + [q']P = [t']\varphi_q(P) \pmod{(\psi_\ell, E)}$:

- $(x^q, y^q), (x^{q^2}, y^{q^2}) \pmod{\psi_\ell, E} \implies$ быстрое возведение в степени q и $q^2 \implies O(\log q)$ умножений в $\mathbb{F}_q[x,y]/(\psi_\ell, E) \implies \widetilde{O}(\ell^4 \log q)$ операций в $\mathbb{F}_q$.
- $[q']P \implies$ рекур. формулы для многочленов деления
- $[t'](x^q, y^q) \pmod{\psi_\ell, E}$:
  x^q и $y^q \pmod{\psi_\ell, E}$ – многочлены степени $< \ell^2$, уже известны, $t' < \ell \implies$ используя рек. формулы для мн. деления имеем макс. ℓ операций умножения + редукции многочленов степени $< 2\ell^2$ в $\mathbb{F}_q[x,y]/(\psi_\ell, E)$ $\implies \widetilde{O}(\ell^5)$ операций в $\mathbb{F}_q$.

Перебирая t' нужно проверять условие макс. ℓ раз $\Longrightarrow$
$\widetilde{O}(\ell^5 \log q + \ell^6) = \widetilde{O}(\ell^5 \log q)$ операций в $\mathbb{F}_q$.
Всего в алгоритме делается $n = O(\frac{\log q}{\log \log q})$ итераций.

Итого: $O(\frac{\log q}{\log \log q}) \cdot \widetilde{O}(\ell^5 \log q) = \widetilde{O}(\log^7 q)$ операций в $\mathbb{F}_q$
или $\widetilde{O}(\log^8 q)$ битовых операций.

Алгоритм Схоофа: дальнейшие улучшения

Schoof-Elkies-Atkin (SEA):

- замена многочленов деления на многочлены g_ℓ, задающие изогении (степени: $\mathrm{O}(\ell^2) \implies \mathrm{O}(\ell)$)
- факторизация модулярных многочленов для нахождения ядер изогений (нулей g_ℓ)
- эвристическая сложность: $\mathrm{O}(\log^4 \mathrm{q})$

Литература

- I. Blake и др. *Elliptic curves in cryptography*. 1999.
- H. Cohen и др. *Handbook of elliptic and hyperelliptic curve cryptography*. 2005.
- R. Schoof. *Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod p*. 1985.
- L. C. Washington. *Elliptic curves: number theory and cryptography*. 2008.

Контакты

snovoselov@kantiana.ru