

---

## Лабораторная работа № 3

Опубликована 03.10.2024

Дедлайн 31.10.2024

---

Разработать программу в системе компьютерной алгебры Sage, реализующую следующие функции:

1. `nTorsion_extension_deg(n, a, b, q)`, где  $a, b$  – коэффициенты эллиптической кривой  $E : y^2 = x^3 + ax + b$ , заданной над полем  $\mathbb{F}_q$ , где  $q$  – простое,  $\neq 2, 3$ ,  $n \geq 3$ . Функция возвращает  $d = [K_{E,n} : K]$  – степень расширения поля  $K_{E,n} = (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$  над  $K = \mathbb{F}_q$ , где  $E[n] = \{\mathcal{O}, (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$  – точки  $n$ -кращения эллиптической кривой  $E$ .
2. `nTorsionPoints(n, a, b, q)`, те же выходные данные, что и для функции `nTorsion_extension_deg(n, a, b, q)`, но здесь  $n \geq 1$ . Функция возвращает все точки  $n$ -кращения кривой  $E$ .

**Замечание: оптимизировать работу функций так, чтобы они терминировали за разумное время для малых и средних значений  $n, q$ .**

### Требования к сдаче

- Исходный код должен содержать комментарии к каждой из функций с описанием входных и выходных параметров
- Лабораторную следует выполнять модификацией файла с тестами, заменяя строку `"# your code here."` на код, реализующий функцию.
- Функции должны работать на всех примерах, что проверяется запуском команды:  
`sage -t file_with_tests.sage`
- Студент должен понимать, что он написал, зачем, а также ответить на теоретические вопросы.