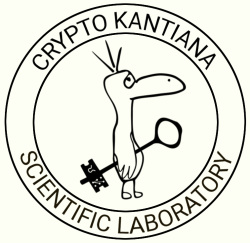
# Эллиптические кривые

## Лекция 2. Групповой закон

Семён Новосёлов

БФУ им. И. Канта

2025




IKBFU

# Групповой закон

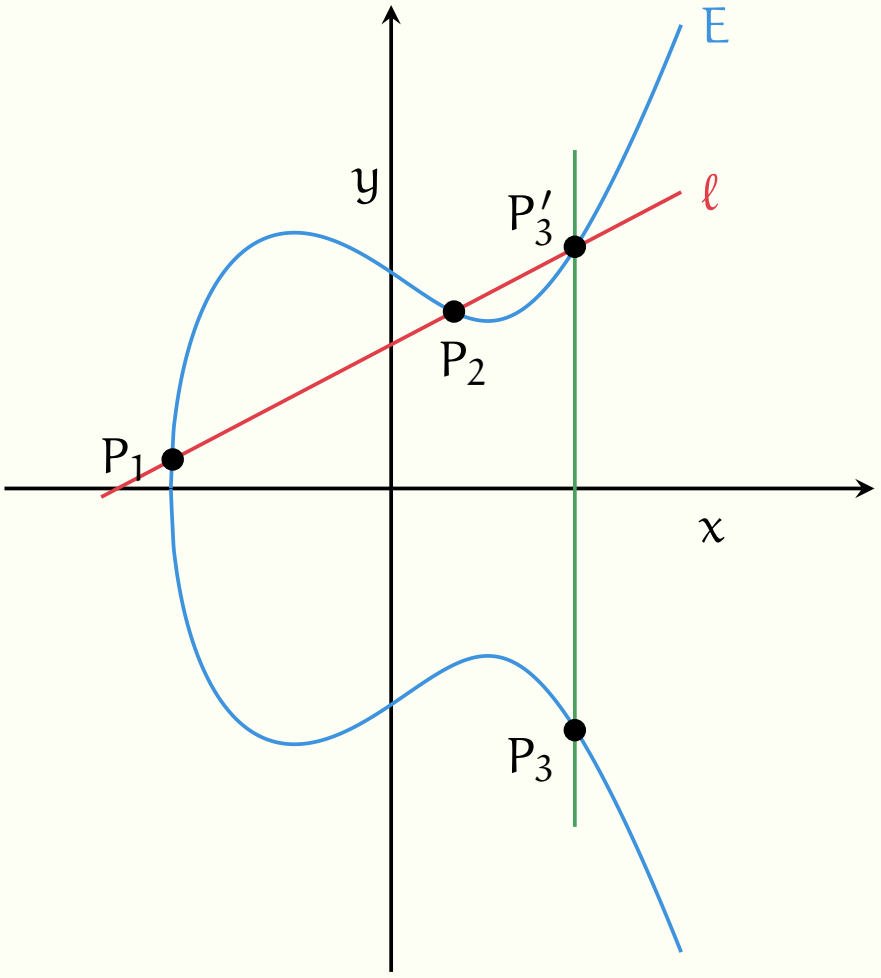
$$E/K : y^2 = x^3 + Ax + B$$

$$P_1 = (x_1, y_1) \in E$$
$$P_2 = (x_2, y_2) \in E$$
$$P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$$

**Случай** $x_1 \neq x_2$**:**

$$x_3 = m^2 - x_1 - x_2$$
$$y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

| Сложность |
| --- |
| I + 3M в K |



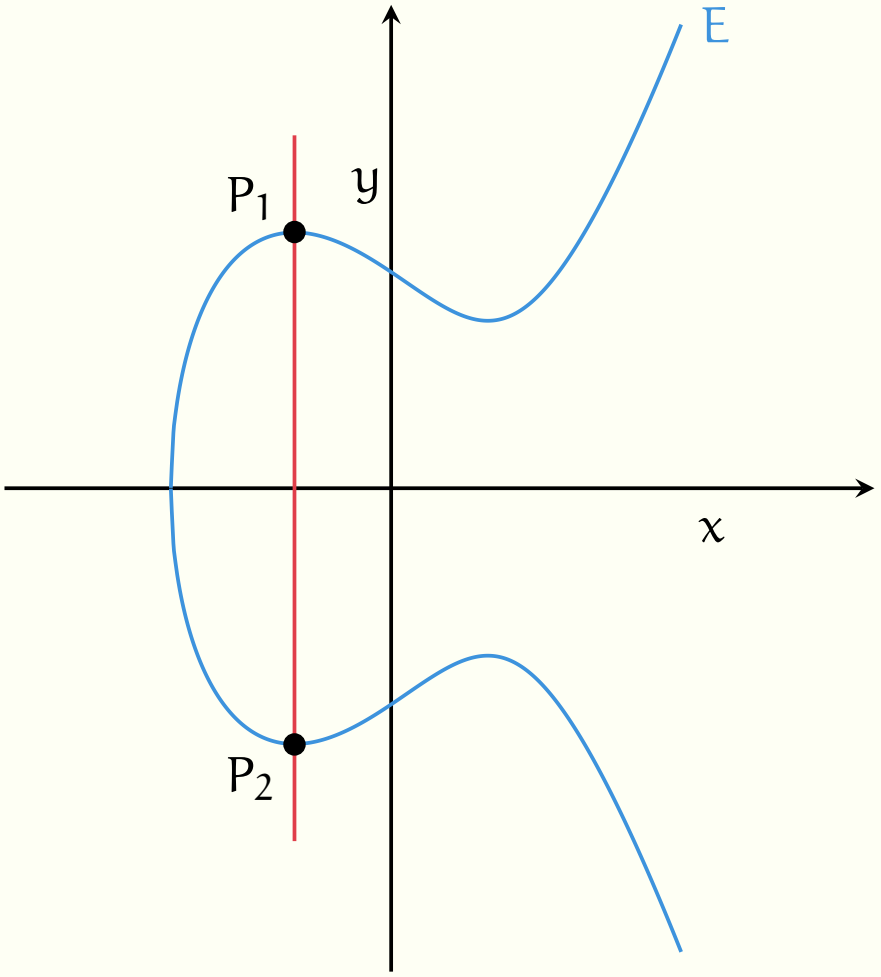
# Групповой закон - 2

$$E/K : y^2 = x^3 + Ax + B$$

$$P_1 = (x_1, y_1) \in E$$
$$P_2 = (x_2, y_2) \in E$$
$$P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$$

**Случай** $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$ **или** $P_1 = P_2, y_1 = 0$**:**

$$P_1 + P_2 = \mathcal{O}$$



# Групповой закон - 3

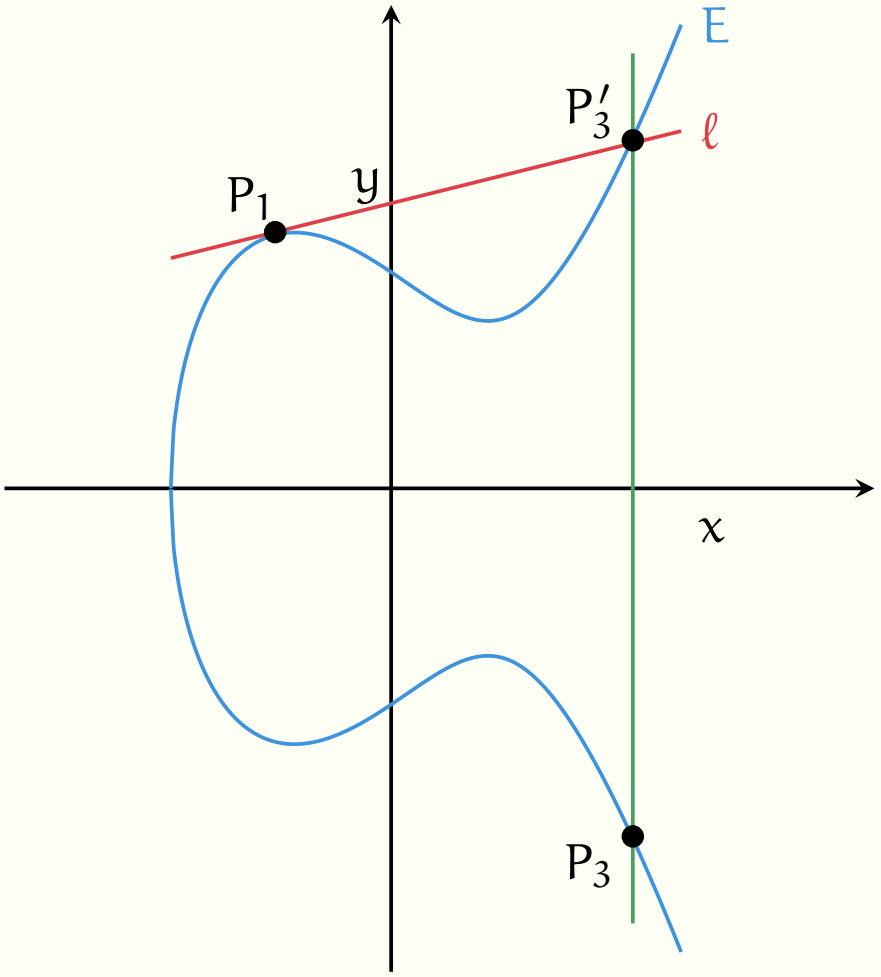
$$E/K : y^2 = x^3 + Ax + B$$

$$P_1 = (x_1, y_1) \in E$$
$$P_2 = (x_2, y_2) \in E$$
$$P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$$

**Случай** $P_1 = P_2$, $y_1 \neq 0$:

$$x_3 = m^2 - 2x_1$$
$$y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1$$
$$m = \frac{3x_1^2 + A}{2y_1}$$

| Сложность |
| --- |
| I + 4M в K |



# Групповой закон - 4

**Теорема**

1. $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$ *(коммутативность)*
2. $P + \mathcal{O} = P \; \forall P \in E$ *($\exists$ нейтральный элемент)*
3. $\forall P \in E \; \exists P' \in E : P + P' = \mathcal{O}$ *($\exists$ обратный элемент)*
4. $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$ *(ассоциативность)*

- $-P = (x, -y)$ для кривой в краткой форме

**Вывод:**

$E(K)$ – аддитивная абелева группа

$E(\mathbb{Q})$ – конечно-порожденная группа

$E(\mathbb{F}_q)$ – конечная группа $\Rightarrow$ криптография на DLOG

# Быстрое умножение точки на число

$$P \to [k] \cdot P = \underbrace{P + P + \ldots + P}_{k\text{-раз}}$$

**Сложность**

$k - 1$ сложений (наивно)

**Бинарный метод:**

$$k = \sum_{j=0}^{\ell-1} k_j 2^j, \quad k_j \in \{0, 1\}$$

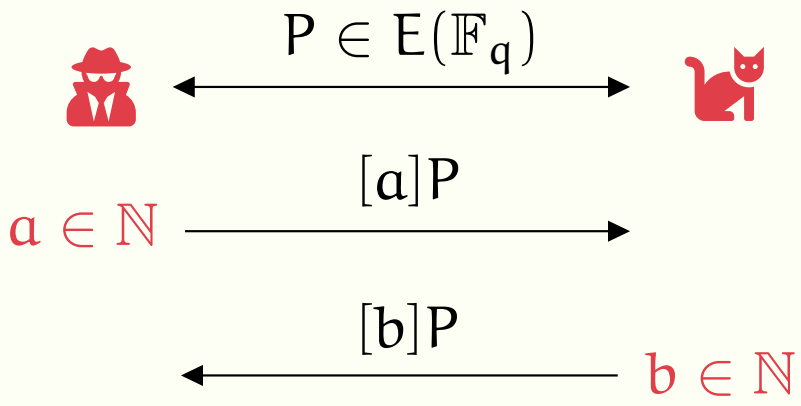
1. $Q \leftarrow \mathcal{O}$
2. **for** $j = \ell - 1$ **to** $0$ **by** $-1$:
   $Q \leftarrow [2]\,Q$
   **if** $k_j = 1$:
   $Q \leftarrow Q + P$
3. **return** $Q$

**Сложность**

удвоений: $O(\lg k)$
сложений: $\omega t(k) \sim O(\lg k)$
($\omega t$ – вес Хэмминга $k$)
**всего:** $O(\lg k)$

# Протокол Диффи – Хеллмана

## Выработка общего секретного ключа



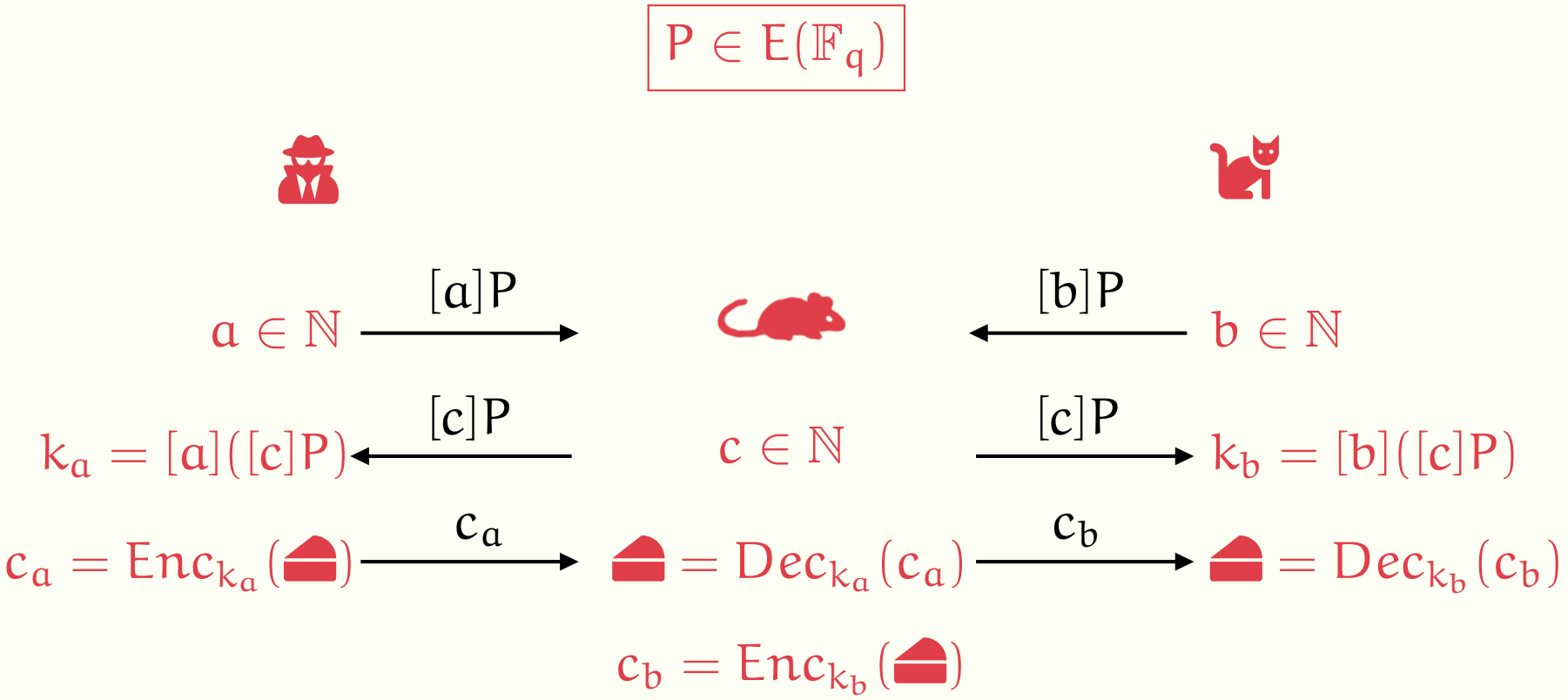

$$[ab]P = [a]([b]P)$$

$$[ab]P = [b]([a]P)$$

- Безопасность основана на сложности нахождения **DLOG** (как минимум):

$$(P, [n]P) \mapsto n$$

# Атака “человек посередине”[1]




[1] *(англ.)* man in the middle (MITM)

# Оптимизация: проективные координаты

$$E : Y^2Z = X^3 + AxZ^2 + BZ^3$$

$$P_3 = P_1 + P_2$$
$$u = Y_2Z_1 - Y_1Z_2$$
$$v = X_2Z_1 - X_1Z_2$$
$$X_3 = v(\underbrace{u^2Z_1Z_2 - v^3 - 2v^2X_1Z_2}_{w}),$$
$$Y_3 = u(X_1v^2Z_2 - w) - v^3Z_2Y_1$$
$$Z_3 = v^3Z_1Z_2$$

**Сложность**

12M (проективные) **vs** I + 3M (аффинные)

# Оптимизация: особые формы кривой

**Кривые Монтгомери:**

$$By^2 = x^3 + Ax^2 + x$$

| Сложность |
| --- |
| удвоение + сложение: $6$M + $4$S |

**Curve25519**: $B = 1, A = 486662, q = p = 2^{255} - 19$.

**Также:** кривые Эдвардса, в форме Якоби и др.

# Цифровая подпись

**Общие параметры:** кривая $E$ над $\mathbb{F}_q$, $P \in E(\mathbb{F}_q)$, $r = \mathrm{ord}(P)$.

**Генерация ключей 🐱:**

1. секретный ключ: $a \overset{🐟}{\in} [1, r]$
2. открытый ключ: $Q = [a]P$

**Подпись сообщения ✉:**

1. 🐱 выбирает $k \overset{🐟}{\in} [1, r]$ и вычисляет $R = [k]P = (x, y)$
2. вычисляет $s = k^{-1}(✉ + ax) \bmod r$
3. 🐾 = $(R, s)$

**Проверка подписи 🐾 = $(R, s)$:**

1. 🕵 вычисляет $u_1 = s^{-1}✉ \bmod r$ и $u_2 = s^{-1}x \bmod r$
2. $S = [u_1]P + [u_2]Q$
3. проверяет равенство $S = R$.

**Корректность:**

$$S = [u_1]P + [u_2]Q = [s^{-1}✉]P + [s^{-1}x]Q =$$
$$= [s^{-1}]([✉]P + [xa]P) = [k]P = R$$

- используется повсеместно в составе протокола TLS
- используется в Bitcoin для подписи транзакций
- для безопасности схемы требуется ряд ограничений на параметры
- ECDSA / ГОСТ 34.10-2018

# Проблемы реализации

Если использовать одно и тоже значение $k$ для разных подписей, то можно восстановить секретный ключ.

$$🐾 = (R, s) \qquad 🐾' = (R, s')$$

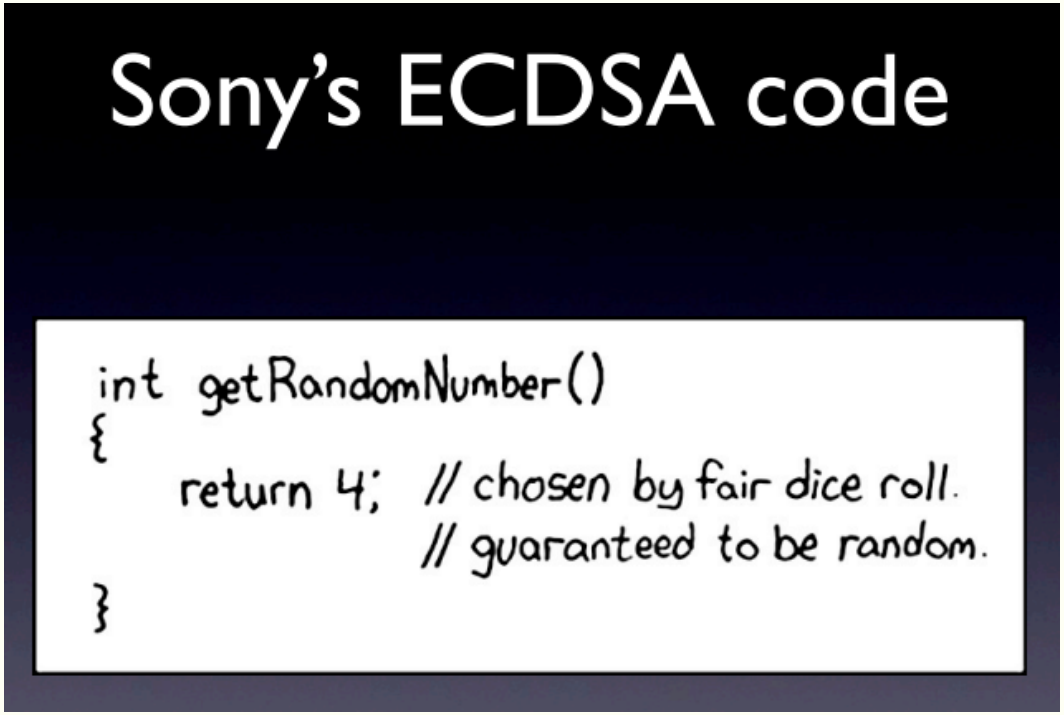
$$s = k^{-1}(✉ + ax), \qquad s' = k^{-1}(✉' + ax)$$

$$s - s' = k^{-1}(✉ - ✉') \Longrightarrow k = \frac{✉ - ✉'}{s - s'}$$

$$\boxed{a = \frac{sk - ✉}{x}}$$

# Проблемы реализации. Пример

Взлом подписей для приложений в PS3.




PlayStation 3

Источник: fahrplan.events.ccc.de/congress/2010/Fahrplan/attachments/1780_-27c3_console_hacking_2010.pdf

# Литература


- Washington L.C. ”Elliptic curves number theory and cryptography”
- Menezes A. ”Elliptic curve public key cryptosystems”
- Blake I., Seroussi G., Smart N. ”Elliptic Curves in Cryptography”



Контакты

snovoselov@kantiana.ru


**Страница курса:**

crypto-kantiana.com/semyon.novoselov/teaching/elliptic_curves_2025