

Эллиптические кривые

Лекция 1. Введение

Семён Новосёлов

БФУ им. И. Канта

2026



Мотивация

Криптография:

- классическая – дискретный логарифм (ECDH, ECDSA)
- постквантовая – схемы на изогениях (CSIDH, SQISign)

База для построения множества схем и протоколов.

Примеры использования

Классическая криптография в реальном мире:

- **https** (TLS): цифровая подпись
- **WireGuard VPN** в составе ядра Linux:
Curve25519, обмен ключами
- **SSH**: кривая Эдвардса Ed25519
- **Bitcoin/Ethereum**: кривая Secp256k1, цифровая подпись

Пример. TLS

→ ↻ ⓘ ru.wikipedia.org/wiki/Заглавная_страница 🔍 🔒 ★ 📄

Сведения о сайте

Инструмент просмотра сертификатов: *.wikipedia.org

Общие **Подробнее**

Иерархия сертификатов

- ▼ ISRG Root X1
 - ▼ E6
 - *.wikipedia.org**

Поля сертификата

- ▼ *.wikipedia.org
 - ▼ Сертификат
 - Версия
 - Серийный номер
 - Алгоритм подписи сертификатов**
 - Издатель
 - ▼ Срок действия
 - Не ранее

Значение поля

Подпись ECDSA X9.62 с SHA-384

Постквантовая криптография: перспективы

Полный **отказ** от классической криптографии (**ECDSA**, **ECDH**, **FFDH**, **RSA**) рекомендован NIST начиная с **2035**¹.

А с **2030** классические схемы объявлены **устаревшими**.

Замена для эллиптических кривых:

- цифровые подписи: **ECDSA** → **SQISign**
- обмен ключами: **ECDH** → **CSIDH**

! В настоящее время схемы на изогениях не утверждены в качестве стандартов.

¹<https://csrc.nist.gov/csrc/media/Presentations/2025/nist-pqc-the-road-ahead/images-media/rwcpqc-march2025-moody.pdf>

План курса

- 1 Введение
- 2 Групповой закон на эллиптической кривой
- 3 Точки n -кручения
- 4 Алгоритмы подсчета $\mathbb{F}_q$ -рациональных точек кривой
- 5 Алгоритм факторизации на эллиптических кривых
- 6 Тест на простоту Goldwasser-Kilian
- 7 Выбор эллиптической кривой для криптографии
- 8 Криптографические схемы на изогениях

Порядок работы

Формат: лекции + сдача лабораторных работ

- после лекций выкладываются лабораторные работы
- срок сдачи: **2** недели
- за пределами срока сдачи работы принимаются с низким приоритетом и в количестве не более **2** за пару

Экзамен: сдать **85%** лабораторных и **курсовую**

- оценка – среднее по оценкам за сдачу лабораторных

Определение

Уравнение Вейерштрасса **в аффинных координатах**:

$$f : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (1)$$

Уравнение над полем K – **гладкое**, если во множестве его решений над $\overline{K}$ нет сингулярных точек.

Эллиптическая кривая задаётся как

$$E(K) = \{(x, y) \in K \times K : f(x, y) = 0\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

для гладкого f .

- $\mathcal{O}$ – точка в бесконечности.
- K – некоторое поле, чаще всего $K = \mathbb{F}_q$.

Проективные координаты

Уравнение Вейерштрасса в проективных координатах:

$$F : Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3, \quad (2)$$

где $a_i \in K$.

- **сингулярное**: $\exists P \in \mathbb{P}^2(K) : \frac{dF}{dX}(P) = \frac{dF}{dY}(P) = \frac{dF}{dZ}(P) = 0$.
- **гладкое** (или несингулярное) в противном случае.

Эллиптическая кривая E – множество точек $\mathbb{P}^2(K)$, удовлетворяющих гладкой кривой (2).

- Точка в бесконечности: $\exists ! \mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$.
- Проективные координаты позволяют избежать деления в арифметике за счёт доп. умножений.

Дискриминант

Как проверить, что уравнение Вейерштрасса задаёт эллиптическую кривую? Обозначим

$$\begin{aligned}d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\d_4 &= 2a_4 + a_1a_3 \\d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\d_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 \\c_4 &= d_2^2 - 24d_4\end{aligned}\tag{3}$$

Тогда **дискриминант** уравнения (1) определяется как

$$\Delta = -d_2^2d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6.$$

◁ применение общей теории² к уравнению Вейерштрасса ▷

²Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. - Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants (1994)

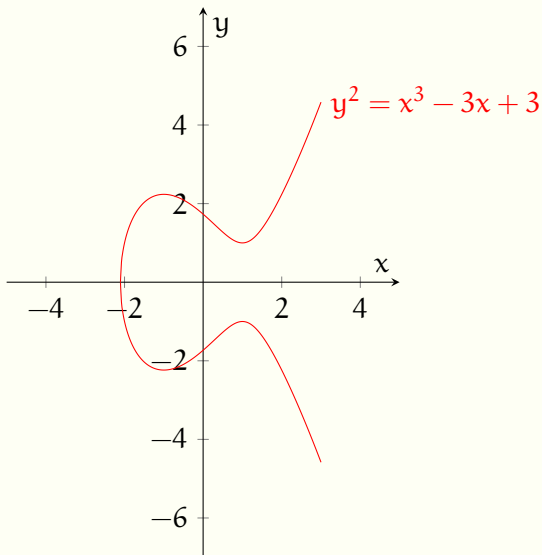
Классификация уравнений Вейерштрасса

Теорема [Silverman, Thm. 1.4]

- 1 $\Delta \neq 0 \iff$ кривая гладкая ($\implies$ эллиптическая)
- 2 $\Delta = 0, c_4 \neq 0 \iff$ кривая обладает узлом (node)
- 3 $\Delta = c_4 = 0 \iff$ кривая обладает точкой перегиба (cusp)

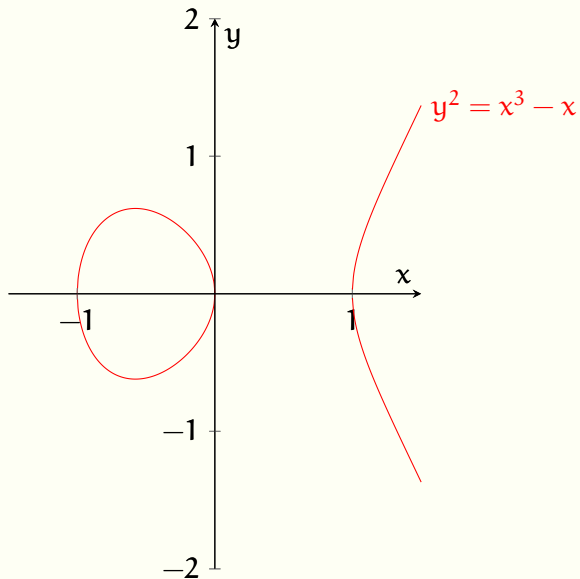
Классификация уравнений Вейерштрасса - 2

$$\Delta < 0$$



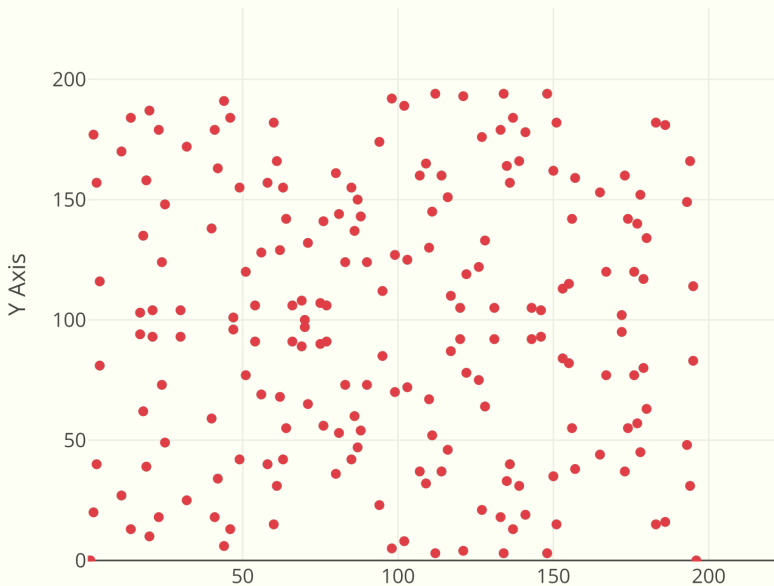
Классификация уравнений Вейерштрасса - 3

$$\Delta > 0$$



Эллиптическая кривая над конечным полем

$$y^2 = x^3 - x \text{ над } \mathbb{F}_{197}$$



Изоморфизмы эллиптических кривых

Пусть $E_1/K, E_2/K$ – эллиптические кривые с уравнениями:

$$\begin{aligned} E_1 : y^2 + a_1xy + a_3y &= x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ E_2 : y^2 + a'_1xy + a'_3y &= x^3 + a'_2x^2 + a'_4x + a'_6 \end{aligned} \quad (4)$$

$E_1/K, E_2/K$ **изоморфны**, если они изоморфны как проективные многообразия.

Теорема

$E_1 \simeq E_2 \iff \exists u, r, s, t \in K, u \neq 0$ такие, что замена

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + u^2sx + t) \quad (5)$$

преобразует кривую E_1 в E_2 .

Изоморфизм кривых задаёт отношение эквивалентности.

Изоморфизмы – зачем нужно?

Позволяют подбирать форму кривой под нужные свойства в арифметике. Например:

- с меньшим кол-вом коэффициентов: ускорение вычислений
- с константным временем выполнения группового закона: противодействие атакам по побочным каналам

Краткие формы

$$E/K : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (1)$$

$\text{char } K \neq 2$: Изоморфизм

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{1}{2}(y - a_1x - a_3) \right)$$

преобразует E/K к виду:

$$E/K : y^2 = 4x^3 + d_2x^2 + 2d_4x + d_6. \quad (6)$$

$\text{char } K \neq 2, 3$: Изоморфизм

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x - 3d_2}{36}, \frac{y}{216} \right)$$

Преобразует (6) к виду:

$$E/K : y^2 = x^3 + ax + b \quad (7)$$

$$a = -27c_4$$

$$b = -56(d_2^3 + 36d_2d_4 - 216d_6)$$

Краткие формы - 2

В последнем случае,

$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$$

$\text{char}K = 2$:

$$a_1 \neq 0 \implies (x, y) \mapsto \left(a_1^2 x + \frac{a_3}{a_1}; a_1^3 y + \frac{a_1^2 a_4 + a_3^2}{a_1^3} \right)$$

$$E/K : y^2 + xy = x^3 + a_2'x^2 + a_6' \quad (8)$$

$$a_1 \neq 0 \implies (x, y) \mapsto (x + a_2, y)$$

$$E/K : y^2 + a_3y = x^3 + a_4x + a_6 \quad (9)$$

Определение изоморфности кривых

j-инвариант эллиптической кривой E :

$$j(E) = \frac{c_4^3}{\Delta}$$

или для краткой формы $j(E) = -1728 \frac{4a^3}{\Delta}$.

Теорема

$$E_1 \simeq E_2 \text{ над } \overline{K} \iff j(E_1) = j(E_2)$$

Определение изоморфности кривых над полем K :
проверка условий теоремы. Если выполняется –
составление и решение системы уравнений используя (5).

Литература

- 1 Washington L.C. "Elliptic curves number theory and cryptography"
- 2 Menezes A. "Elliptic curve public key cryptosystems"
- 3 Hankerson D., Menezes A., Vanstone S. "Guide to elliptic curve cryptography"
- 4 Blake I., Seroussi G., Smart N. "Elliptic Curves in Cryptography"
- 5 Silverman J.H. "The Arithmetic of Elliptic Curves"

Контакты

snovoselov@kantiana.ru

Страница курса:

crypto-kantiana.com/semyon.novoselov/teaching/elliptic_curves_2026

Темы курсовых

- 1 Кriptoанализ схем на изогениях (несколько тем)
- 2 Схема цифровой подписи SQISign
- 3 Атака Кастрика-Декру
- 4 crypto-kantiana.com/semyon.novoselov/teaching/elliptic_curves_2026

Дополнительно: “Криптография на изогениях”

Специализированный курс по постквантовой криптографии на эллиптических кривых.

Начало: 15 октября.

Преподаватели: Новоселов С.А., Киршанова Е.А.

Запись:

- <https://lms.kantiana.ru/course/view.php?id=27470>