

Эллиптические кривые

Лекция 6. Алгоритм факторизации на эллиптических кривых

Семён Новосёлов

БФУ им. И. Канта

2026



Факторизация

По заданному большому числу N найти его множители.

- Безопасность криптосистемы RSA строится на сложности факторизации числа $N = p \cdot q$.
- Факторизация чисел требуется и в других приложениях: например, при нахождении порядка элемента группы.

Алгоритм ECM¹

- предложен Ленстрой в 1987 г.
- наиболее эффективен для нахождения малых множителей числа N
- используется для отсеечения малых делителей перед запуском более эффективных для больших чисел алгоритмов факторизации (решето числового поля)

¹Elliptic curve factorization method

Факторизация в Sage и Pari/GP

По-умолчанию Sage вызывает методы из Pari/GP.

Факторизация выполняется в несколько этапов:

1 (поиск малых делителей)

запускаются по очереди:

- ρ -метод Полларда
- метод квадратичных форм Шенкса
- алгоритм ECM

2 (поиск больших делителей)

- метод квадратичного решета (MPQS)

Замечание: самый лучший алгоритм факторизации – NFS не реализован, но он работает быстрее только для больших чисел $> 2^{300}$. Для таких чисел лучше использовать спец. пакеты – CADO-NFS и др.

$(p - 1)$ -метод Полларда

Алгоритм ECM – обобщение метода $(p - 1)$ -метода факторизации Полларда²: $\mathbb{Z}_N \implies E(\mathbb{Z}_N)$.

Малая теорема Ферма

p – простое, $a \in \mathbb{Z}$ и $p \nmid a \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

²не путать с ρ -методом Полларда

Пусть $N = pq$, где p, q — простые и

- $p - 1$ факторизуется на **малые** простые
- $q - 1$ **не** факторизуется на **малые** простые

Точнее:

$p - 1 = \prod p_i^{e_i}$, $p_i \leq B_1$, $p_i^{e_i} \leq B_2$, т. е. $p - 1$ явл-ся **B_1 -гладким**.

Число — **B -гладкое**, если все его простые множители $\leq B$.

Идея метода:

- (из теор. Ферма): $\forall a \in \mathbb{Z}_N^\times$ и $\forall k = l(p - 1)$:

$$a^k = (a^l)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

- $a^k \not\equiv 1 \pmod{q} \implies \gcd(N, a^k - 1) = p$

Алгоритм

Вход: $N = p \cdot q$ и границы B_1, B_2 .

Выход: $p, q = \frac{N}{p}$, или «делители не найдены».

① $a \leftarrow \mathbb{Z}_N^\times$

② **for** всех простых $p_i \leq B_1$:

$a \leftarrow a^{p_i^{e_i}} \bmod N$, где e_i – макс.: $p_i^{e_i} \leq B_2$.

③ **if** $\gcd(a - 1, N) \notin \{1, N\}$

return $\gcd(a - 1, N), \frac{N}{\gcd(a-1, N)}$.

else:

return «делители не найдены».

Корректность

Лемма

Пусть $N = p \cdot q$, $B_1, B_2 \in \mathbb{N}$, т.ч. $(p-1) - B_i$ -гладкое и $p-1 = \prod p_i^{e_i}$, $p_i^{e_i} \leq B_2$. А $(q-1) -$ не B_i -гладкое.

Тогда алгоритм $(p-1)$ Полларда находит p за время $O(B_1 \lg^3 N)$ с вероятностью $1 - \frac{1}{B_1}$.

◁ Положим $k = \prod_{p_i \leq B_1} p_i^{e_i}$.

- $k -$ кратно $p-1 \implies a^k \equiv 1 \pmod{p}$
- $(q-1) -$ не B_1 -гладкое $\implies \exists r -$ простое, $r > B_1$ т.ч. $r \mid q-1$.

В случае $r \mid \text{ord}_{\mathbb{Z}_q^\times}(a)$:

- имеем $\text{ord}_{\mathbb{Z}_q^\times}(a) \nmid k$, поэтому $a^k \not\equiv 1 \pmod{q}$.
- $\gcd(a^k - 1, N) = p$, т.к. $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^k \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Так как $\text{ord}_{\mathbb{Z}_q^\times}(a) -$ целое число, то вероятность того, что $\text{ord}_{\mathbb{Z}_q^\times}(a) \nmid k$ равна $1 - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{B_1}$. ▷

Сложность

Существует не более B_1 простых p_i , таких что $p_i < B_1$
(точнее: $\exists \sim \frac{B_1}{\lg(B_1)}$ по теореме о распределении простых чисел.)

- Шаг 2: $O(\lg^3 N)$
- Шаг 3: $O(\lg^2 N)$

Итого: $O(B_1 \cdot \lg^3 N)$.

Замечание. Вероятность успеха и сложность алгоритма зависят от $|\mathbb{Z}_p^\times| = p - 1$:

- $\frac{p-1}{2}$ – простое $\Rightarrow B_1 \approx p \Rightarrow$ сложность $O(p \cdot \lg^3 N)$ – не лучше простого перебора.

Решение: использовать эллиптические кривые, т.к.
 $\#E(\mathbb{Z}_p) \in [p + 1 - 2\sqrt{p}, p + 1 + 2\sqrt{p}]$, и в этом интервале $\exists$ много гладких чисел.

Метод факторизации на эллиптических кривых (ЕСМ)

$$E : y^2 = x^3 + ax + b \bmod N$$

- $E(\mathbb{Z}_N) \simeq E(\mathbb{Z}_p) \times E(\mathbb{Z}_q)$.
- Т.к. кольцо $\mathbb{Z}_N$ содержит делители 0, групповой закон корректно определять в проективных координатах.

Идея алгоритма: использовать ошибки «деление на 0» для нахождения множителей N при работе в аффинных координатах.

Нахождение множителя из группового закона

Вход: $P, Q \in E(\mathbb{Z}_N) - \{\mathcal{O}\}$

Выход: либо $P + Q = (x_3, y_3)$, либо $d \mid N$.

❶ if $x_1 \equiv x_2 \pmod N$ и $y_1 = -y_2 \pmod N$
return $\mathcal{O}$

❷ $d = \gcd(x_1 - x_2, N)$
if $d \notin \{1, N\}$: return d

❸ if $x_1 \equiv x_2 \pmod N$
 $d = \gcd(y_1 + y_2, N)$
if $d > 1$: return d

❹ $\alpha = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \neq x_2 \\ \frac{3x_1^2 + a}{y_1 + y_2}, & x_1 = x_2. \end{cases}$
 $\beta = y_1 - \alpha x_1$

❺ $x_3 = \alpha^2 - x_1 - x_2 \pmod N$
 $x_3 = -(\alpha x_3 + \beta) \pmod N$
return (x_3, y_3)

Алгоритм факторизации ECM

Вход: $N = p \cdot q$, границы B_1, B_2

Выход: p, q или «делители не найдены»

- 1 Выбрать $(a, x, y) \leftarrow \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$,
 $b = y^2 - x^3 - ax \bmod N$
- 2 if $\gcd(4a^3 + 27b^2, N) = \begin{cases} 1, & \text{положим } P = (x, y) \\ N, & \text{идем на шаг 1} \\ \text{иное, вернуть } p, q \end{cases}$
- 3 for всех простых $p_i < B_1$ и $e_i : p_i^{e_i} < B_2$:
 $P = [p_i^{e_i}]P$ на $E : y^2 = x^3 + ax + b$
 при ошибке «деление на 0» вернуть делитель N .
- 4 перейти к Шагу 1 или вернуть «делитель не найден».

Корректность

Лемма

Пусть $N = p \cdot q$, $E(\mathbb{Z}_N)$ – эллиптическая кривая, т. ч. $|E(\mathbb{F}_p)|$ – B_1 -гладкое и $|E(\mathbb{F}_q)|$ – не B_1 -гладкое. Тогда алгоритм ECM возвращает p, q за время $O(B_1 \lg^3 N)$ с вероятностью $\geq 1 - \frac{1}{B_1}$.

◁ Пусть $k = \prod_{p_i \leq B_1} p_i^{e_i}$.

Т. к. $\#E(\mathbb{F}_q)$ – не B_1 -гладкое, то $\exists r > B_1$ т. ч. $r \mid \#E(\mathbb{F}_q)$.

Имеем: $r \mid \text{ord}_{E(\mathbb{F}_q)}(P) \implies [k]P \neq \mathcal{O}$ на $E(\mathbb{F}_q)$.

С другой стороны: $\#E(\mathbb{F}_p) \mid k \implies [k]P = \mathcal{O}$ на $E(\mathbb{F}_p)$.

Вычисляем $[k]P$ на $E(\mathbb{Z}_N) \implies$ получаем $P' + Q' = \mathcal{O}$ на $E(\mathbb{F}_p)$ и $P' + Q' \neq \mathcal{O}$ на $E(\mathbb{F}_q) \implies$ Алгоритм вернёт (p, q) .

Сложность и вероятность: аналогично $(p - 1)$ методу Полларда. ▷

Замечание. Баланс выбора B_1 :

- B_1 нужно брать больше, чтобы увеличивать вероятность, что $E(\mathbb{F}_p) - B_1$ -гладкое (и можно применять лемму).
- малое $B_1 \Rightarrow$ быстрый алгоритм, малая вероятность успеха
- большое $B_1 \Rightarrow$ медленный алгоритм, большая вероятность успеха.

Оптимально: $B_1 \approx L_p[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}] = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\log p)^{\frac{1}{2}}(\log \log p)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$ время работы алгоритма: $L_p[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ в предположении о гладкости чисел в интервале $[p + 1 - 2\sqrt{p}, p + 1 + 2\sqrt{p}]$.

- ЕСМ – лучший на сегодня алгоритм для нахождения делителей < 100 бит.

Литература

-  I. Blake и др. Elliptic curves in cryptography. 1999.
-  H. Cohen и др.
Handbook of elliptic and hyperelliptic curve cryptography. 2005.
-  H. W. Lenstra Jr. Factoring integers with elliptic curves. 1987.
-  L. C. Washington. Elliptic curves: number theory and cryptography. 2008.

Контакты

snovoselov@kantiana.ru