

Эллиптические кривые

Лекция 7. Тест на простоту на эллиптических кривых

Семён Новосёлов

БФУ им. И. Канта

2026



Мотивация

Тесты на простоту используются в криптографии для:

- генерации простых чисел, как в криптосистеме RSA
- генерации групп для криптосистем на DLOG
(необходимы простые группы)

План

- 1 Тест на простоту Миллера-Рабина
- 2 Доказательство простоты с помощью ЭК

Тест на простоту Миллера-Рабина

Малая теорема Ферма

p – простое, $p \nmid a \implies a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

$$p - 1 = 2^k \cdot q, q - \text{нечётное}$$



$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 &= (a^{2^{k-1} \cdot q} - 1) \cdot (a^{2^{k-1} \cdot q} + 1) = \\ &= (a^q - 1)(a^{2^{k-1} \cdot q} + 1) \cdot \dots \cdot (a^{2 \cdot q} + 1) \cdot (a^q + 1) \end{aligned}$$

- p – простое $\implies p$ делит один из множителей, т.е. выполняется одно из условий:

$$a^q \equiv 1, a^{2^{k-1} \cdot q} \equiv -1, \dots, a^q \equiv -1 \quad (1)$$

- p – не простое $\implies \exists a$: все сравнения (1) не выполняются

Идея: для проверки n на простоту выбираем случайное число a , $\gcd(a, n) = 1$ и проверяем (1) по модулю n .

- Число a т.ч. $a^q \not\equiv 1, a^{2^{k-1} \cdot q} \not\equiv -1, \dots, a^q \not\equiv -1$ называется **свидетелем**, что n – составное.

Алгоритм Миллера-Рабина

Вход: n, a .

Выход: «составное» или «возможно простое»

- 1 $n - 1 = 2^k q$, q – нечётное
- 2 $a = a^q \bmod n$
- 3 **if** $a \equiv 1 \bmod n$:
 return «возможно простое»
- 4 **for** $i = 0 \dots k - 1$
- 5 **if** $a \equiv -1 \bmod n$
 return «возможно простое»
- 6 $a = a^2 \bmod n$
- 7 **return** «составное»

Для проверки на простоту:

- алгоритм выполняется K раз для случайных $a \in [2, n - 2]$
- время работы: $O(K \log^3 n)$
- вероятность ошибки: 2^{-2K}

Тест Миллера

Алгоритм можно сделать **детерминированным** (предполагая GRH) перебрав все $a \leq 2 \ln^2 n$.

- Сложность: $\tilde{O}(\log^4 n)$.
- Для маленьких n достаточно перебрать только небольшое кол-во a .
- Например, для $n \leq 2^{64}$ достаточно проверить $a = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ и 37 .

Тест на простоту на эллиптических кривых

Задача: По данному (большому) числу p определить, является ли p простым числом и, если да, вывести доказательство (**сертификат**) простоты p .

- самый быстрый¹ на сегодняшний день алгоритм предложен Goldwasser-Killan в 1986
- с улучшениями время работы = $\text{poly } \log p$, проверка сертификата простоты: $O(\log^4 p)$

¹ на практике, сложность в худшем случае не известна

- **детерминированные** алгоритмы (Cohen-Lenstra'1984) работают за **квази**-полиномиальное² от $\log p$ время $(\log p)^{O(\log \log p)}$
⇒ пригодны только для небольших чисел p .

Идея алгоритма Goldwasser-Killan: заменить группу $\mathbb{Z}_n^\times$ как в алгоритме Миллера-Рабина или тесте Поклингтона-Леммера на $E(\mathbb{Z}_n)$.

²если не использовать эвристики, как в детерминированной версии Миллера-Рабина

I. Предварительные сведения

Теорема о распределении порядков случайных ЭК

Пусть $p > 5$ – простое, $S \subseteq [p + 1 - \lfloor \sqrt{p} \rfloor, p + 1 + \lfloor \sqrt{p} \rfloor]$ и $A, B \leftarrow \mathbb{F}_p$. Тогда $\exists c$ – константа, т.ч.

$$\Pr [\#E_{A,B}(\mathbb{F}_p) \in S] > \frac{c}{\log p} \cdot \frac{|S| - 2}{2\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1},$$

где $\#E_{A,B}(\mathbb{F}_p)$ – число точек на $E_{A,B} : y = x^3 + Ax + B$.

◁ Док-во: Lenstra'1987 ▷

Неформальная интерпретация теоремы:

- число точек $E_{A,B}$ ведёт себя как случайное число из интервала $[p + 1 - \lfloor \sqrt{p} \rfloor, p + 1 + \lfloor \sqrt{p} \rfloor]$

Лемма

Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $2, 3 \nmid n$; $p > 3$ – простой делитель n и $4A^3 + 27B^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

- Для любого $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ пусть $x_p := x \pmod{p}$.
- Для любой точки $L = (x, y) \in E_{A,B}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ пусть $L_p = (x_p, y_p) \in E_{A,B}(\mathbb{F}_p)$.

Тогда $\forall L, M \in E_{A,B}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, если $L + M$ определено, то $(L + M)_p = L_p + M_p$.

Теорема (Критерий простоты)

Положим:

- $n \in \mathbb{Z}, A, B \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $2, 3 \nmid n, \gcd(4A^3 + 27B^2, n) = 1$
- $L \in E_{A,B}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), L \neq \infty$

Тогда:

$\exists$ простое $q > (n^{1/4} + 1)^2$, т.ч. $qL = \infty \implies n$ – простое.

◁ От противного: пусть n – составное $\Rightarrow \exists p > 3$, т.ч. $p \mid n$, p – простое. Т.к. p – простое, то $p \leq \sqrt{n}$.

- Заметим: $\gcd(4A^3 + 27B^2, p) \neq 0 \pmod p$.

Иначе: противоречие с $\gcd(4A^3 + 27B^2, n) = 1$.

- Тогда по Лемме имеем $L_p \in E_{A,B}(\mathbb{F}_p)$ и $q \cdot L_p = (qL)_p = \infty_p = \infty \Rightarrow \text{ord}(L_p) \mid q \Rightarrow \text{ord}(L_p) = q$, т.к. q – простое.

- Имеем:

$$(n^{1/4} + 1)^2 < q = \text{ord}(L_p) \leq \#E_{A,B}(\mathbb{F}_p) < (\sqrt{p} + 1)^2.$$

- $\Rightarrow p > \sqrt{n}$.

- Это противоречие, значит, n – простое. ▷

II. Алгоритм: тест на простоту

Вкратце:

- доказательство простоты p сводим к доказательству простоты $q \leq \frac{p}{2} + o(p)$
- рекурсивно применяем алгоритм для $p = q$, пока не получим достаточно малое значение q – такое, что **детерминированные** тесты будут эффективны.

По критерию простоты задача сводится к построению для p , кривой $E_{A,B}$ над $\mathbb{F}_p$ с точкой L порядка $q \approx p/2$.

Алгоритм 1. Gen_curve

Вход: p

Выход: A, B, q

- ❶ $A, B \xleftarrow{\$} \mathbb{F}_p$, т.ч. $(4A^3 + 27B^2, p) = 1$ и $\#E(\mathbb{F}_p) \equiv 0 \pmod{2}$
- ❷ $q = \#E_{A,B}(\mathbb{F}_p)/2$
if $2 \mid q$ или $3 \mid q$
 перейти к шагу 1
- ❸ Запустить вероятностный алгоритм проверки q на простоту (Миллера–Рабина) на $O(\log p)$ шагов (т.е. чтобы вероятность ошибки была $\sim 2^{-\log p}$).

Алгоритм 2. Find_point

Вход: p, q, A, B .

Выход: точка $L \in E(\mathbb{F}_p)$ порядка q .

- 1 $x \xleftarrow{\$} \mathbb{F}_p$ т.ч. $x^3 + Ax + B$ – квадрат в $\mathbb{F}_p$
- 2 $y \xleftarrow{\$} \left\{ \pm \sqrt{x^3 + Ax + B} \right\}, L := (x, y)$
- 3 **if** $q \cdot L \neq \infty$:
перейти к шагу 1.
- 4 **return** L

Алгоритм 3. Prove_prime

Вход: p , LB – число бит в числе такое, что детерминированные алгоритмы простоты эффективны для этого числа.

Выход: сертификат простоты

- ❶ $i = 0, p_0 = p$
- ❷ **while** $p_i > 2^{LB}$:
 - 2.1 $(A_i, B_i), p_{i+1} \leftarrow \text{Gen_curve}(p_i)$
 - 2.2 $L_i \leftarrow \text{Find_point}(p_i, p_{i+1}, A, B)$
 - 2.3 $i := i + 1$
 - 2.4 **if** $i \geq (\log p)^{\log \log p}$ или $2 \mid p_i$ или $3 \mid p_i$
перейти к шагу 1
- ❸ проверить p_i на простоту детерминированным алгоритмом
if не доказано, что p_i – простое:
перейти к шагу 1
- ❹ **return** $C = ((A_0, B_0), L_0, p_1, \dots, (A_{i-1}, B_{i-1}), L_{i-1}, p_{i-1})$

Корректность

- p – простое. Тогда выход C – сертификат: «свидетельство» простоты p . На шагах 2.1, 2.2 мы получаем кривую E_{A_i, B_i} и точку L_i порядка p_{i+1} , удовлетворяющие условиям Критерия простоты.
- p – составное. Тогда получим делители p на шаге 3 (или раньше) алгоритма Find_point(), аналогично алгоритму факторизации.

Сложность

Алг. 1. Gen_curve

Самый затратный шаг – вычисление $\#E_{A,B}(\mathbb{F}_p)$
 $\implies$ алгоритм Схоофа-Элкиса-Аткина: $\tilde{O}(\log^4 p)$.

Алг. 2. Find_point

Самые затратные шаги:

Шаг 1: $x \xleftarrow{\$} \mathbb{F}_p$ – кв. вычет с вероятностью $O(1)$.

Шаг 4: быстрое умножение на q :

$\tilde{O}(\log q \cdot \log p) = \tilde{O}(\log^2 p)$ битовых операций.

Алг. 3. Prove_prime

На шаге 2, p_i уменьшается на 2 $\implies O(\log p)$ итераций.

Доминирующий шаг: подсчёт точек в Gen_curve

$\implies$ общее время работы: $\tilde{O}(\log^5 p)$

Количество кривых $E_{A,B}$, не удовлетворяющих условиям шага 1 в Gen_curve() = $O(\log^3 p)$ (эвристика)

Проверка сертификата. Алгоритм 4. Check_prime

Вход: $p_0, C = ((A_0, B_0), L_0, p_1, \dots, (A_{i-1}, B_{i-1}), L_{i-1}, p_{i-1})$

Выход: {Reject, Accept}

① **for** $j = 0 \dots i - 1$:

(a) **assert** $(2 \nmid p_j)$

(b) **assert** $(3 \nmid p_j)$

(c) **assert** $(\gcd(4A_j^3 + 27B_j^2, p_j) = 1)$

(d) **assert** $(p_{j+1} > (p_j^{1/4} + 1)^2)$

(e) **assert** $L_j \neq \infty$

(f) **assert** $p_{j+1} L_j = \infty$

② **return** Accept

Корректность

- $\text{Check_prime}()$ возвращает Ассепт $\Rightarrow p_i$ – простое $\Rightarrow p_{i-1}$ – простое по Критерию простоты ($\Rightarrow \dots \Rightarrow p_0$ – простое)
- Условия (a),(b) проверяются на шаге 2.4. алгоритма 3. Prove_prime
- (c) – шаг 1 в Алг.1. Gen_curve
- (d) – Теорема Хассе-Вейля: $\#E_{A,B}(\mathbb{F}_{p_j}) \geq (\sqrt{p_j} - 1)^2 \Rightarrow$

$$p_{j+1} = \frac{\#E(\mathbb{F}_{p_j})}{2} \geq \frac{(\sqrt{p_j} - 1)^2}{2} > (p_j^{1/4} + 1)^2 \quad \forall p_j > 37$$

(для малых p_j проверка на простоту тривиальна)

- (e), (f) проверяются в Find_point , шаг 3.

Время работы

- Проверка каждого p_j : $O(\log^3 p)$ — шаг (f) самый затратный.
- Всего: $O(\log p)$ различных p_j в сертификате
 $C \Rightarrow O(\log^4 p)$.

Литература

-  H. Cohen и H. W. Lenstra. Primality testing and Jacobi sums. 1984.
-  S. Goldwasser и J. Kilian. Primality testing using elliptic curves. 1999.
-  H. W. Lenstra Jr. Factoring integers with elliptic curves. 1987.
-  L. C. Washington. Elliptic curves: number theory and cryptography. 2008.

Контакты

snovoselov@kantiana.ru